

Exercice 1

1. Le point K est le milieu du segment [DC] donc : K a pour coordonnées : $\left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)$.

$$\boxed{\overrightarrow{AK} \left(\frac{1}{2} ; 1 ; 0\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{AL} \left(0 ; 1 ; \frac{3}{2}\right)}.$$

2. a. Le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ est orthonormal, d'où :

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AL} = -3 + 3 = 0$$

\overrightarrow{n} est donc orthogonal à \overrightarrow{AK} et \overrightarrow{AL} qui sont deux vecteurs non colinéaires du plan (AKL), donc $\boxed{\overrightarrow{n} \text{ est un vecteur normal au plan (AKL)}}$.

- b. (AKL) passe par A et admet \overrightarrow{n} pour vecteur normal, donc :

$$M(x; y; z) \in (AKL) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0$$

$$\iff 6x - 3y + 2z = 0$$

Donc : $\boxed{6x - 3y + 2z = 0 \text{ est une équation cartésienne de (AKL)}}$.

- c. Δ est perpendiculaire au plan (AKL), donc elle admet \overrightarrow{n} pour vecteur directeur. De plus, elle passe par D. D'où :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que : } \overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{n}$$

$$\iff \begin{cases} x = 6k \\ y = 1 - 3k \\ z = 2k \end{cases}, \text{ avec } k \text{ réel.}$$

Donc $\boxed{\text{un système d'équations paramétriques de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 6k \\ y = 1 - 3k \\ z = 2k \end{cases}, \text{ avec } k \text{ réel.}}$

- d. Notons (x_N, y_N, z_N) les coordonnées du point N, projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

$$N \in (AKL) \text{ donc } 6x_N - 3y_N + 2z_N = 0.$$

De plus, $N \in \Delta$ donc on dispose d'un réel k tel que : $x_N = 6k$, $y_N = 1 - 3k$ et $z_N = 2k$ (*).

On en déduit que : $6(6k) - 3(1 - 3k) + 2(2k) = 0$ et par suite $k = \frac{3}{49}$.

D'après (*), on en déduit que : $x_N = 6 \times \frac{3}{49}$; $y_N = 1 - 3 \times \frac{3}{49}$ et $z_N = 2 \times \frac{3}{49}$.

Donc $\boxed{N\left(\frac{18}{49} ; \frac{40}{49} ; \frac{6}{49}\right) \text{ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL)}}$.

3. Le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$ est orthonormal, d'où les calculs de produit scalaire et de longueurs suivants.

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DK} = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times 0 + 0 = 0 \text{ donc ADK est un triangle rectangle en D.}$$

Son aire est donc, en unité d'aire : $\mathcal{A}_{ADK} = \frac{AD \times KD}{2}$, d'où : $\mathcal{A}_{ADK} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{2}$ et par suite :

$$\mathcal{A}_{ADK} = \frac{1}{4}, \text{ en unité d'aire.}$$

La hauteur du tétraèdre ADKL relative à la base ADK est DL.

Le volume de ADK est donc, en unité de volume : $\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ADK} \times DL$.

$$\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{2} \text{ et donc : } \boxed{\mathcal{V}_{ADKL} = \frac{1}{8}}.$$

b. N est le projeté orthogonal de D sur (AKL) donc la distance du point D au plan (AKL) est DN.

$$DN = \sqrt{\left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{40}{49} - 1\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2}$$

$$DN = \sqrt{\frac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2}}$$

$$DN = \frac{3}{7}, \text{ en unité de longueur}$$

c. On sait que le volume de ADKL, en unité de volume, est égal à : $\frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{AKL} \times DN$, où \mathcal{A}_{AKL} est l'aire de AKL.

D'où : $DN = \frac{\mathcal{V}_{ADKL} \times 3}{\mathcal{A}_{AKL}}$ et donc : $\mathcal{A}_{AKL} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{7}}$ et par suite :

$\mathcal{A}_{AKL} = \frac{7}{8}$ en unité d'aire.

Exercice 2

1. \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc sur $]1; +\infty[$ et ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$ (car strictement positive sur cet intervalle) donc f est une fonction dérivable sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x > 1$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2} \right)$$

Pour tout x de $]1; +\infty[$, on a $(\ln x)^2 > 0$ et $x > 0$ et donc $f'(x) > 0$.

On en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

• Limite en 1 :

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = 0$, avec $\ln x > 0$ pour $x > 1$, d'où par quotient : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\ln x} = +\infty$

et donc, par somme :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty$.

• Limite en $+\infty$:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et donc par somme :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. a. Soit $x \in]1; +\infty[$, $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ln x = 0$ (justifié en 1)).

On en déduit que Γ est asymptote à (\mathcal{C}) au voisinage de $+\infty$.

b. Soit $x \in]1; +\infty[$, $\ln x > 0$ et donc $-\frac{1}{\ln x} < 0$, par conséquent (\mathcal{C}) est en dessous de Γ sur $]1; +\infty[$.

3. a. La tangente \mathcal{F}_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

\mathcal{F}_a passe par O ssi $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$

$$\text{ssi } f(a) - af'(a) = 0.$$

b. Soit $x \in]1; +\infty[$, $(\ln x)^2 \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\iff f(x) - xf'(x) \\ &\iff \ln x - \frac{1}{\ln x} - \frac{(\ln x)^2 + 1}{(\ln x)^2} = 0 \\ &\iff \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0 \\ &\iff (\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

c. La fonction u est une fonction polynôme, donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel t :

$$u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$$

$$u'(t) = 3(t-1) \left(t + \frac{1}{3} \right).$$

$u'(t)$ est un polynôme du second degré, $3 > 0$ donc $u'(t) > 0$ pour tout t de $] -\infty; -\frac{1}{3}[\cup]1; +\infty[$ et $u'(t) < 0$ pour tout t de $] -\frac{1}{3}; 1[$.

$$\text{Limites : } \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 \text{ et } \lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^3 \\ = +\infty \qquad \qquad \qquad = -\infty$$

D'où le tableau suivant :

t	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$u(t)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$

La fonction u est croissante sur $] -\infty; -\frac{1}{3}[$ et décroissante sur $] -\frac{1}{3}; 1[$.

Par conséquent, sur $] -\infty; 1[$, la fonction u admet un maximum en $-\frac{1}{3}$.

Ce maximum vaut $-\frac{22}{27}$, ainsi l'équation $u(t) = 0$ n'admet pas de solution sur $] -\infty; 1[$.

La fonction u est continue et strictement croissante sur $]1; +\infty[$,

$$u(1) = -2, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +\infty \text{ et } 0 \in [-2; +\infty[$$

d'après le théorème de la bijection, on en déduit que l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, que l'on notera α , sur $]1; +\infty[$.

Par conséquent, l'équation $u(t) = 0$ admet une unique solution, α , sur \mathbb{R} .

d. Soit $x \in]1; +\infty[$,

$$(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \\ t = \ln x \end{cases}$$

$$(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0 \iff \begin{cases} t = \alpha \\ t = \ln x \end{cases}$$

D'après ce qui précède, $\alpha \geq 1 > 0$, donc $\ln x = \alpha$ a une unique solution sur $]1; +\infty[$, donc l'équation $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$ admet une unique solution sur $]1; +\infty[$.

D'après 3. b.), il en est alors de même pour l'équation $g(x) = 0$. Donc il existe une unique tangente à la courbe (\mathcal{C}) passant par l'origine du repère (d'après 3. a.).

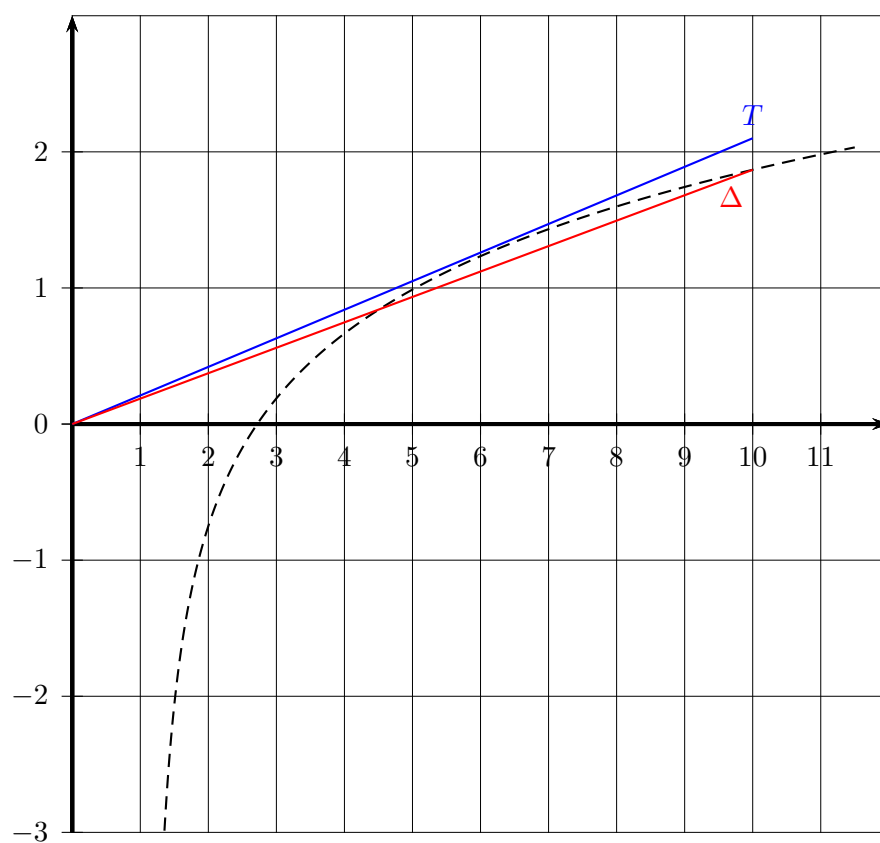
4. Sur l'intervalle $]1; +\infty[$:

Pour $m \leq 0$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.

Pour $0 < m < f'(\alpha)$, l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions.

Pour $m = f'(\alpha)$, l'équation $f(x) = mx$ admet une unique solution.

Pour $m > f'(\alpha)$, l'équation $f(x) = mx$ n'admet pas de solution.



Exercice 3

Partie A

1. a. $x \mapsto x + 3$ est dérivable sur \mathbb{R} donc sur $[0 ; +\infty[$ et elle est strictement positive sur $[0 ; +\infty[$, donc par théorème (composition de fonctions dérivables), $x \mapsto \ln(x + 3)$ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

f est une somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times \frac{1}{x+3} - 1 \\ &= \frac{5-x-3}{x+3} \\ &= \frac{2-x}{x+3}. \end{aligned}$$

Or pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $x + 3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.

$$2 - x > 0 \iff x < 2 \quad \text{et} \quad 2 - x = 0 \iff x = 2.$$

D'où le signe de f' sur $[0 ; +\infty[$:

t	$-\infty$	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	-

- b. D'après 1a), la fonction f est croissante sur $[0 ; 2[$ et décroissante sur $]2 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned} f(2) &= 5 \ln(5) - 2 & f(0) &= \ln 3 \\ &\approx 4,047 \end{aligned}$$

On a le tableau de variations suivant :

x	0	2	α	$+\infty$
f	$5 \ln 3$	$5 \ln(5) - 2$	0	$-\infty$

- c. Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 \ln(x + 3) - x \\ &= 5 \ln \left[x \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right] - x \end{aligned}$$

$$\text{Or } x > 0 \text{ et } \left(1 + \frac{3}{x} \right) > 0 \text{ donc : } f(x) = 5 \ln x + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) - x$$

$$\text{Donc : } f(x) = 5 \ln x - x + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) \text{ et enfin : } \boxed{f(x) = x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 5 \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right)}.$$

- d. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, par croissances comparées, d'où par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \frac{\ln x}{x} - 1 = -1$.

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty. \text{ D'où, par produit : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5 \frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{D'autre part, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ d'où par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1.$$

$$\text{De plus, } \lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0 \text{ (continuité de } \ln \text{ en } 1). \text{ Donc par composée, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{3}{x} \right) = 0.$$

$$\text{On déduit alors, par somme, que : } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}.$$

- e. Voir le tableau plus haut.

2. a. • Sur $[0 ; 2]$: pour tout x de $[0, 2]$, $f(x) > 0$ donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
 • Sur $]2 ; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante.
 $f(2) > 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $0 \in]-\infty ; f(2)[$.
 D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α sur $]2 ; +\infty[$.

Donc finalement, $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ a une unique solution } \alpha \text{ sur } [0; +\infty[.}$

- b. $f(14) = 5 \ln 17 - 14 \approx 0,17 > 0$ et $f(15) = 5 \ln 18 - 15 \approx -0,55 < 0$, donc $\underline{14 < \alpha < 15}$.

A la calculatrice :

$$f(14,23) = 5 \ln(17,23) - 14,23 \approx 0,003 \text{ donc } f(14,23) > 0 \text{ et}$$

$$f(14,24) = 5 \ln(17,24) - 14,24 \approx -0,004 \text{ donc } f(14,24) < 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{14,23 < \alpha < 14,24}.$$

- c. Le tableau de variations montre donc que :

- $f(x) > 0$ sur $[0 ; \alpha[$;
- $f(x) < 0$ sur $[\alpha ; +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

Partie B

1. D'après la partie A, g est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel x positif, $g'(x) = \frac{5}{x+3}$.

On a donc pour tout réel x positif, $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Soit $x \in [0; +\infty[$, $g(x) = x \iff 5 \ln(x+3) = x$
 $\iff 5 \ln(x+3) - x = 0$
 $\iff f(x) = 0$

Or $f(x) = x$ a pour unique solution α sur $[0; +\infty[$ d'après la partie A, donc $g(x) = x$ a pour unique solution α sur $[0; +\infty[$.

3. • $0 \leq 4 \leq \alpha$ donc $0 \leq u_0 \leq \alpha$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_p \leq \alpha$

Comme la fonction g est croissante sur $[0 ; +\infty[$, on a donc : $g(0) \leq g(u_p) \leq g(\alpha)$,

c'est-à-dire $5 \ln 3 \leq u_{p+1} \leq \alpha$ (d'après la question précédente). Or $0 \leq 5 \ln 3$, donc $0 \leq u_{p+1} \leq \alpha$.

L'encadrement est vrai au rang 0, et pour tout entier naturel p , si $0 \leq u_p \leq \alpha$, alors $0 \leq u_{p+1} \leq \alpha$.

D'après le principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, 0 \leq u_n \leq \alpha}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 5 \ln(u_n + 3) - u_n$
 $= f(u_n)$

Or d'après la question précédente, $u_n \in [0, \alpha]$ et d'après la question 2c) de la partie A, f est positive sur cet intervalle.

Donc : $f(u_n) \geq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$. Donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}.$

5. Cette suite est croissante (B4)) et majorée (par α , question B3)), d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge donc vers une limite ℓ .

De plus, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = g(u_n)$ et g est continue sur $[0; +\infty[$ donc : $g(\ell) = \ell$

Or on a vu à la question 2 de la partie B que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ sur $[0 ; +\infty[$. Donc : $\ell = \alpha$.

On a donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$.